

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор Высшей школы**  
**современной математики**  
**А.Н. Соболевский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дифференциальная геометрия
<b>по направлению:</b>	Математика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная математика
	Высшая школа современной математики
	Высшая школа современной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 54 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.Л. Бланк, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

## Аннотация

Дифференциальная геометрия — продолжающая активно развиваться область геометрии, изучающая феномен кривизны. Данный курс посвящён изучению кривизны начиная от классического случая кривизны кривых и поверхностей в евклидовом пространстве, и заканчивая кривизной связностей в векторных расслоениях над гладкими вещественными многообразиями. Затронуты также характеристические классы и когомологии дифференцируемых многообразий.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Изучение теоретических основ дифференциальной геометрии для дальнейшего использования в других математических дисциплинах аналитического цикла; формирование математической культуры, исследовательских навыков. в том числе для решения вычислительных задач, и способности применять знания на практике.

#### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области дифференциальной геометрии;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов дифференциальной геометрии с контекстом других математических дисциплин

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия дифференциальной геометрии кривых, поверхностей и расслоений.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельного анализа кривизны кривых, поверхностей, связностей в векторных расслоениях..

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Кривые и поверхности.	2	2		3
2	Поверхности в конечномерном евклидовом пространстве.	4	4		6
3	Группы и алгебры Ли в дифференциальной геометрии	2	2		3
4	Векторные расслоения.	2	2		3
5	Евклидовы и эрмитовы расслоения.	2	2		3
6	Связности в векторных расслоениях. Локальное задание связности. Кривизна	4	4		8
7	Римановы многообразия.	2	2		4
8	Геометрические.	2	2		4
9	Подмногообразия римановых многообразий.	2	2		4
10	Главные расслоения и связности в них.	2	2		4
11	Характеристические классы.	2	2		4
12	Расслоения и их когомологии.	4	4		8
Итого часов		30	30		54
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Кривые и поверхности.

Кривые и поверхности в плоскости и пространстве.

Кривизна, кручение, репер Френе.  
Первая и вторая квадратичные формы.

## 2. Поверхности в конечномерном евклидовом пространстве.

Поверхности в конечномерном евклидовом пространстве.  
Первая и вторая квадратичные формы  
Связности в касательном и нормальном расслоениях к поверхности.

## 3. Группы и алгебры Ли в дифференциальной геометрии

Группы и алгебры Ли в дифференциальной геометрии.

## 4. Векторные расслоения.

Векторные расслоения.  
Склеивающие коциклы.  
Структурная группа.

## 5. Евклидовы и эрмитовы расслоения.

Евклидовы и эрмитовы расслоения.  
Естественные операции с расслоениями.

## 6. Связности в векторных расслоениях. Локальное задание связности. Кривизна

Связности в векторных расслоениях.  
Локальное задание связности.  
Кривизна  
Связности в евклидовых и эрмитовых расслоениях.

## 7. Римановы многообразия.

Римановы многообразия.  
Кручение, кривизна.  
Связность Леви-Чивиты.  
Симметрии тензора кривизны.  
Тензор Риччи.

## 8. Геодезические.

Геодезические.  
Геодезические координаты.  
Лагранжево описание геодезических.  
Вторая вариация.

## 9. Подмногообразия римановых многообразий.

Подмногообразия римановых многообразий.  
Первая и вторая квадратичные формы.

## 10. Главные расслоения и связности в них.

Главные расслоения и связности в них.  
Связь с векторными расслоениями.

## 11. Характеристические классы.

Характеристические классы.

Конструкция Чженя-Вейля характеристических классов.

Классы Чженя, Понтрягина и Эйлера.

Теорема Гаусса-Бонне.

## 12. Расслоения и их когомологии.

Расслоения и их когомологии.

Класс Тома.

Конструкция класса Тома по Матаи-Квиллену.

Связь класса Тома и класса Эйлера.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Современная геометрия : Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — 5-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС : Добросвет, 2001. — Т. 1 : Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. - 2001. - 336 с.

### Дополнительная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии, Электронная копия доступна на сайте электронно-библиотечной системы / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. — Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

#### Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.Л. Бланк, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дифференциальная геометрия» обучающийся должен:

### знать:

Основные понятия дифференциальной геометрии кривых, поверхностей и расслоений.

### уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

### владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельного анализа кривизны кривых, поверхностей, связностей в векторных расслоениях..

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Кривые и поверхности в плоскости и пространстве. Кривизна, кручение, репер Френе. Первая и вторая квадратичные формы
2. Поверхности в конечномерном евклидовом пространстве. Первая и вторая квадратичные формы
3. Связности в касательном и нормальном расслоениях к поверхности
4. Группы и алгебры Ли в дифференциальной геометрии
5. Векторные расслоения. Склеивающие коциклы. Структурная группа
6. Евклидовы и эрмитовы расслоения. Естественные операции с расслоениями
7. Связности в векторных расслоениях. Локальное задание связности. Кривизна
8. Связности в евклидовых и эрмитовых расслоениях
9. Римановы многообразия. Кручение, кривизна. Связность Леви-Чивиты. Симметрии тензора кривизны. Тензор Риччи
10. Геодезические. Геодезические координаты. Лагранжево описание геодезических. Вторая вариация
11. Подмногообразия римановых многообразий. Первая и вторая квадратичные формы
12. Главные расслоения и связности в них. Связь с векторными расслоениями
13. Характеристические классы. Конструкция Чженя-Вейля характеристических классов. Классы Чженя, Понтрягина и Эйлера. Теорема Гаусса-Бонне
14. Расслоения и их когомологии. Класс Тома
15. Конструкция класса Тома по Матаи-Квиллену. Связь класса Тома и класса Эйлера

Пример экзаменационного билета:

- 1) Векторные расслоения. Определение и примеры.
- 2) Теорема Гаусса-Бонне.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;



- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.